10. Präsenzübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(zu bearbeiten am Donnerstag, 21.06.2007)

Aufgabe P15 *Pfadintegral für das Doppelmuldenpotential*

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem eindimensionalen Potential der Form

$$V(x) \;=\; \frac{g^2}{8}(x^2 - a^2)^2 \;,$$

dem Doppelmuldenpotential. Skizzieren Sie es. Wie lautet der Zeitentwicklungsoperator $U(x_f, +\frac{T}{2}|x_i, -\frac{T}{2})$ in der Pfadintegraldarstellung?
Die einfachste Methode, dieses Pfadintegral zu berechnen, besteht in einer „Rotation ins Euklidische", d.h. einer analytischen Fortsetzung

$$t \;\mapsto\; -\mathrm{i}t \;.$$

Wie lauten die euklidische Wirkung und der euklidische Zeitentwicklungsoperator? Leiten Sie die klassische euklidische Bewegungsgleichung aus dem Verschwinden der Variation der Wirkung her, und interpretieren Sie sie.
Was sind die trivialen Lösungen der klassischen euklidischen Bewegungsgleichung, und wie werden sie für das ursprüngliche Potential zurückübersetzt? Im Limes großer Zeiten T existiert die sogenannte Instanton- bzw. Anti-Instanton-Lösung,

$$x_{\mathrm{kl}}(t) \;=\; \pm a \,\tanh\{\omega(t - t_c)/2\} \qquad \text{mit} \quad m\omega^2 = V''(\pm a) = g^2 a^2$$

und einer Konstanten t_c. Bestätigen Sie, daß dies tatsächlich eine euklidische Lösung ist. Skizzieren Sie beide Lösungen und interpretieren Sie sie.

Aufgabe P16 *Clifford-Algebra*

Die 4×4-Matrizen γ^μ mit $\mu = 0, 1, 2, 3$ sind definiert über die Relation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \;=\; 2g^{\mu\nu} \;.$$

Zeigen Sie

a) $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma^\mu \;=\; 4g_{\nu\lambda}$

b) $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma^\mu \;=\; -2\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\nu$

c) $\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) \;=\; 4g_{\mu\nu}$

d) $\{\gamma^5, \gamma^\nu\} \;=\; 0 \quad \text{mit} \quad \gamma^5 := \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

Es gilt die Summationskonvention.